第 29 卷 第 2 期　应 用 数 学 学 报　Vol. 29 No. 2
2006 年 3 月　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　March, 2006

成批到达排队系统的随机比较

禹海波
(北京工业大学经济与管理学院，北京 100022)
(E-mail:haibo@bjut.edu.cn)
何启明
(Dalhousie University, Halifax, Nova Scotia, Canada B3J2X4)
张汉勤
(中科院数学与系统科学研究院，北京 100080)

摘　要　本文研究成批到达排队系统中队长过程的随机比较问题。利用随机比较方法我们对成批到达指数服务的多服务台排队系统进行分析，得到了该排队系统中队长过程的随机比较以及队长函数关于时间的凹性和凸性。同时我们也给出了成批到达一般服务的单服务台排队系统队长过程、稳态队长的随机比较以及队长函数关于时间的凹性和凸性。

关键词：　排队系统，批量到达，马尔可夫链，随机比较，凸性
MR(2000) 主题分类：　60K25, 90B22
中图分类：　O226

1　引言

在现实生活中经常遇到成批到达的现象，例如在生产制造系统中需要加工的部件成批到达加工车间，又如在库存系统中，顾客的需求按照复合 Poisson 过程到达系统。以上这些现象都可以描述成成批到达的排队系统。经典的成批到达排队系统的研究通常集中于这类排队系统的稳态排队指标（如队长、等待时间）方面的研究， Medhi[1] 给出了 $\mathrm{M}^X/\mathrm{M}/1$ 和 $\mathrm{M}^X/\mathrm{G}/1$ 等成批到达排队系统中稳态队长和等待时间分布概率母函数的表达式。

由于概率母函数或变换在计算方面具有局限性,对于比较复杂的排队系统如 $\mathrm{M}^X/\mathrm{G}/c$ 当 $c>1$ 时很难用传统的方法来解决。同时一个排队系统在任意时刻队长性质的研究是一个非常有意义但又困难的问题，人们通过研究发现，利用随机比较方法，即用定义于由概率测度 (或分布函数) 组成的集合上偏序 (即随机序) 的性质对随机变量、随机向量或随机过程进行比较，从而达到对复杂系统如排队系统、库存系统和排队网络等进行优化的目的。关于随机比较方面的文献参见 Stoyan[2] 以及 Shaked 和 Shanthikumar[3] 的两本专著。顾客到达间隔或服务时间分布一般的排队系统中队长函数关于时间的单调性和凸性的研究参见 Yu, He 和 Zhang[4] 。

本文的组成是在第二节介绍两个常用的随机序包括通常的随机序和矩母函数序的定义和性质，介绍用于排队系统队长过程随机比较研究的单调矩阵的概念和性质；第三节研究成批到达多服务台排队系统中队长过程的随机比较和队长函数凸性等结果；第四节

本文 2004 年 3 月 22 日收到.

对成批到达一般服务排队系统我们除了能够得到队长函数的凸性等结果外，进一步我们给出该排队系统稳态队长的随机比较结果。

本文中记 $\mathbf{Z}_+$ 表示所有非负整数组成的集合， $\mathbf{R}_+$ 表示所有非负实数组成的集合。$\mathbf{R^n}$ 表示所有 n 维实值向量组成的集合。

2 预备知识

首先给出用于排队系统队长随机比较的两种随机序 (通常的随机序和矩母函数序) 的定义以及单调矩阵的定义和性质。

记 $\nu=(\nu(0),\nu(1),\ldots)$ 和 $\hat{\nu}=(\hat{\nu}(0),\hat{\nu}(1),\ldots)$ 分别是定义于 $\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$ 上的两个随机变量 X 和 $\hat{X}$ 的概率分布. 称 ν 按通常的随机序比 $\hat{\nu}$ 小 (记为 $\nu\le_d\hat{\nu}$ 或等价地记为 $X\le_d\hat{X}$)，如果 $\sum\limits_{i=k}^{\infty}\nu(i)\le\sum\limits_{i=k}^{\infty}\hat{\nu}(i)$ 对所有的 $k\in\mathbf{Z}_+$ 都成立。记 $\nu=_d\hat{\nu}$ 当且仅当 $\nu(i)=\hat{\nu}(i)$ 对所有的 $i\in\mathbf{Z}_+$ 都成立。

记 $(X_0,X_1,\ldots,X_n)$ 和 $(\hat{X}_0,\hat{X}_1,\ldots,\hat{X}_n)$ 是定义于 $\mathbf{R^n}$ 上的两个随机向量,称 $(X_0,X_1,\ldots,X_n)$ 比 $(\hat{X}_0,\hat{X}_1,\ldots,\hat{X}_n)$ 随机地小 (记为 $(X_0,X_1,\ldots,X_n)\le_d(\hat{X}_0,\hat{X}_1,\ldots,\hat{X}_n)$)，如果 $\mathbf{E}[f(X_0,X_1,\ldots,X_n)]\le_d\mathbf{E}[f(\hat{X}_0,\hat{X}_1,\ldots,\hat{X}_n)]$ 对所有定义于 $\mathbf{R^n}$ 上的递增函数都成立。

记 $\{X(t),t\ge0\}$ 和 $\{\hat{X}(t),t\ge0\}$ 是两个连续时间随机过程. 称 $\{X(t),t\ge0\}$ 按通常的随机序比 $\{\hat{X}(t),t\ge0\}$ 小 (记为 $\{X(t),t\ge0\}\le_d\{\hat{X}(t),t\ge0\}$), 如果对所有的 $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n<\infty$ 都有 $(X(0),X(t_1),\ldots,X(t_n))\le_d(\hat{X}(0),\hat{X}(t_1),\ldots,\hat{X}(t_n))$ 成立。

记 $\nu=(\nu(0),\nu(1),\ldots)$ 和 $\hat{\nu}=(\hat{\nu}(0),\hat{\nu}(1),\ldots)$ 分别是定义于 $\mathbf{Z}_+$ 上的两个随机变量 Y 和 $\hat{Y}$ 的概率分布. 称 ν 按矩母函数序比 $\hat{\nu}$ 小 (记为 $\nu\le_{mg}\hat{\nu}$(或等价地记为 $Y\le_{mg}\hat{Y}$，如果 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}s^i\nu(i)\ge\sum\limits_{i=0}^{\infty}s^i\hat{\nu}(i)$ 对所有的 $0\le s\le1$ 都成立。

记 P 和 $\hat{P}$ 是定义于 $\mathbf{Z}_+\times\mathbf{Z}_+$ 上的两个随机矩阵， $P(i,\cdot)$ 和 $\hat{P}(i,\cdot)$ 分别表示矩阵 P 和 $\hat{P}$ 的第 i 行向量， $i\ge0$ 。称矩阵 P 比 $\hat{P}$ 小 (记为 $P\le_d\hat{P}$，如果 $P(i,\cdot)\le_d\hat{P}(i,\cdot)$ 对所有的 $i\ge0$ 都成立。称随机矩阵 P 随机单调，如果 $P(i,\cdot)\le_d P(i+1,\cdot)$ 对所有的 $i\ge0$ 都成立.

下面引理给出连续时间可数状态 Markov 链的随机比较，利用这一结果我们将在第三节和第四节给出批量到达排队系统中队长过程的随机比较以及队长函数的凸(凹)性。

引理 1 (Stoyan [2], Theorem 4.2.5a) 假设 $\mathbf{Y}=\{Y_n,n\ge0\}$ 和 $\hat{\mathbf{Y}}=\{\hat{Y}_n,n\ge0\}$ 是定义于同一概率空间上的两个离散时间时齐马尔可夫链，记 ν 和 $\hat{\nu}$ 分别为 $\mathbf{Y}$ 和 $\hat{\mathbf{Y}}$ 的初始概率分布， P 和 $\hat{P}$ 分别为 $\mathbf{Y}$ 和 $\hat{\mathbf{Y}}$ 的一步转移概率矩阵，如果

(i) $\nu\le_d\hat{\nu}$; (ii) $P\le_d\hat{P}$; (iii) 存在一个单调矩阵 M, 使得 $P\le_d M\le_d\hat{P}$. 则

$$\{Y_n,n\ge0\}\le_d\{\hat{Y}_n,n\ge0\}\tag{1}$$

即对任意的 $0=k_0<k_1<\ldots<k_n<\infty$ 有

$$(Y_0,Y_{k_1},\ldots,Y_{k_n})\le_d(\hat{Y}_0,\hat{Y}_{k_1},\ldots,\hat{Y}_{k_n})\tag{2}$$

成立。特别地，对任意的 $n\ge0$ 有 $\nu P^n\le_d\hat{\nu}\hat{P}^n$ 。

3 模型 I: 成批到达指数服务的多服务台排队系统

考虑成批到达的 $\mathrm{M}^X/\mathrm{M}/c$ 排队系统 ($c\ge1$)，假定顾客到达过程为参数 λ 的复合 Poisson 过程, 其中顾客到达的批量独立同分布, 它是一个离散随机变量, 记为 B, 它的分布函数为 $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty}$ 。假定系统中有 c 个并行服务台，每个服务台对顾客的服务时间服从

参数 μ 的指数分布。假定顾客到达时间间隔、服务时间和到达批量相互独立，服务规则为先到系统先服务 (FCFS). 令 $X(t)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数，则 $\mathbf{X}=\{X(t),\ t\in\mathbf{R}_+\}$ 是状态空间为 $\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\ldots\}$ 的连续时间马尔可夫过程，它的无穷小生成元为

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda b(1) & \lambda b(2) & \lambda b(3) & \lambda b(4) & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda b(1) & \lambda b(2) & \lambda b(3) & \cdots \\ & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda b(1) & \lambda b(2) & \cdots \\ & & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots \\ & & (c-1)\mu & -(\lambda+(c-1)\mu) & \lambda b(1) & \cdots \\ & & & c\mu & -(\lambda+c\mu) & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{3}$$

令 $\lambda>0$ 且 $\mu>0$, 则 $\mathbf{X}$ 是不可约齐次马尔可夫过程, 并且它可一致化, 即 $\lambda+c\mu<\infty$ 。为研究马尔可夫过程 $\mathbf{X}$ 队长过程的随机比较结果，我们取正数 η 使得 $\eta\geq\lambda+c\mu$ 。

下面定理给出成批到达多服务台排队系统中队长过程的随机比较。

定理 1 考虑两个成批到达的排队系统 $\mathbf{\Sigma_1}$: $\mathrm{M}^X/\mathrm{M}/c$ 和 $\mathbf{\Sigma_2}$: $\hat{M}^{\hat{X}}/\hat{M}/\hat{c}$ ，假定系统 $\mathbf{\Sigma_1}$ 和 $\mathbf{\Sigma_2}$ 中服务台个数分别为 c 和 $\hat{c}$; 顾客到达率分别为 λ 和 $\hat{\lambda}$; 服务率分别为 μ 和 $\hat{\mu}$; 顾客到达批量的分布分别为 $b=(b(1),b(2),\ldots)$ 和 $\hat{b}=(\hat{b}(1),\hat{b}(2),\ldots)$ 。记 $X(t)$ 和 $\hat{X}(t)$ 分别表示时刻 t 系统 $\mathbf{\Sigma_1}$ 和 $\mathbf{\Sigma_2}$ 中的顾客数，则 $\mathbf{X}=\{X(t),\ t\geq 0\}$ 和 $\hat{\mathbf{X}}=\{\hat{X}(t),\ t\geq 0\}$ 是两个齐次马尔可夫过程，其中 $\mathbf{X}$ 的无穷小生成元 Q 由 (3) 式给出， $\hat{\mathbf{X}}$ 的无穷小生成元 $\hat{Q}$ 是将 (3) 式中的 λ 、 μ 、 c 和 $b(i),i\geq 1$ 分别换成 $\hat{\lambda}$ 、 $\hat{\mu}$ 、 $\hat{c}$ 和 $\hat{b}(i),i\geq 1$ 而得到。假定马尔可夫过程 $\mathbf{X}$ 和 $\hat{\mathbf{X}}$ 的初始概率 ν 和 $\hat{\nu}$ 满足 $\nu\leq_d\hat{\nu}$ 。

(i) 如果 $\lambda=\hat{\lambda},\mu=\hat{\mu},c=\hat{c}$ 且 $b\leq_d\hat{b}$, 则

$$\{X(t),\ t\geq 0\}\leq_d\{\hat{X}(t),\ t\geq 0\}; \tag{4}$$

(ii) 如果 $\lambda=\hat{\lambda},\mu=\hat{\mu},\nu=_d\hat{\nu},b=_d\hat{b}$ 且 $c\geq\hat{c}$, 则 (4) 成立;

(iii) 如果 $\lambda=\hat{\lambda},\nu=_d\hat{\nu},b=_d\hat{b},\mu\geq\hat{\mu}$ 且 $c\mu=\hat{c}\hat{\mu}$ 则 (4) 成立;

(iv) 如果 $\mu=\hat{\mu},c=\hat{c},\nu=_d\hat{\nu},b=_d\hat{b}$ 且 $\lambda\leq\hat{\lambda}$, 则 (4) 成立。

证明: (i) 根据随机过程随机比较的定义，只需证明对所有的 $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n<\infty$ 有 $(X(t_0),X(t_1),\ldots,X(t_n))\leq_d(\hat{X}(t_0),\hat{X}(t_1),\ldots,\hat{X}(t_n))$ 成立，等价地证明对所有的递增函数 $f:Z_+^{n+1}\to R$

$$\mathbf{E}[f(X(t_0),X(t_1),\ldots,X(t_n))]\leq\mathbf{E}[f(\hat{X}(t_0),\hat{X}(t_1),\ldots,\hat{X}(t_n))]$$

成立. 因为

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}[f(X(t_0),X(t_1),\ldots,X(t_n))] \\ = & \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_n} f(i_0,i_1,\ldots,i_n)\mathbf{P}\{X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\ldots,X(t_n)=i_n\} \end{aligned}$$

因此，为证 (4) 只需证明对所有的 $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n$ 和 $i_0,i_1,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}_+$ 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\ldots,X(t_n)=i_n\} \\ \leq & \mathbf{P}\{\hat{X}(t_0)=i_0,\hat{X}(t_1)=i_1,\ldots,\hat{X}(t_n)=i_n\} \end{aligned} \tag{5}$$

成立。根据一致化方法, 如果 $\lambda+c\mu<\infty$, 则存在离散时间时齐 Markov 链 $\mathbf{Y}=\{Y_n,\ n\geq 0\}$, 使得它的转移矩阵 P 满足 $P=I+\frac{Q}{\eta}$ ，且 $\mathbf{X}$ 的转移函数 $P_t(i,j)$ 可进行如下计算:

$P_t(i,j)=e^{-\eta t}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(\eta t)^k}{k!}P^{(k)}(i,j)$，这里我们假定 $X(0)$ 和 Y_0 同分布（有关连续时间和离散时间 Markov 链的相关结果参见 Yu, He 和 Zhang[4] 第 73 页和第 74 页）。经计算对所有的 $0=k_0<k_1<\ldots<k_n$ 有

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}\{X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\ldots,X(t_n)=i_n\}\\=&\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_{n-1}}\nu(i_0)P_{t_1}(i_0,i_1)P_{t_2-t_1}(i_1,i_2)\ldots P_{t_n-t_{n-1}}(i_{n-1},i_n)\\=&e^{-\eta t_n}\prod_{i=1}^{n}\sum_{k_i-k_{i-1}=0}^{\infty}\frac{(\eta(t_i-t_{i-1}))^{k_i-k_{i-1}}}{(k_i-k_{i-1})!}\mathbf{P}\{Y_0=i_0,\ldots,Y_{k_n}=i_n\}\end{aligned}\tag{6}$$

类似地，存在离散时间时齐马尔可夫链 $\hat{\mathbf{Y}}=\{\hat{Y}_n,\ n\geq 0\}$，它的转移矩阵 $\hat{P}$ 满足 $\hat{P}=I+\frac{\hat{Q}}{\eta}$，且有与 (6) 类似的结果，其中对系统 $\boldsymbol{\Sigma_2}$ 我们取 η 使得 $\eta\geq\hat{\lambda}+\hat{c}\hat{\mu}$。

由已知可得马尔可夫链 $\mathbf{Y}$ 和 $\hat{\mathbf{Y}}$ 满足引理 1 中的条件，因此

$$\mathbf{P}\{Y_0=i_0,\ldots,Y_{k_n}=i_n\}\leq\mathbf{P}\{\hat{Y}_0=i_0,\ldots,\hat{Y}_{k_n}=i_n\}\tag{7}$$

对所有的 $i_0,\ldots,i_n\in\mathbf{Z}_+$ 和 $0=k_0<k_1<\ldots<k_n$ 成立。结合 (5),(6) 和 (7) 我们得到 (4) 成立。用类似的方法可以证明 $(ii)\sim(iv)$ 也成立。 □

下面定理给出成批到达多服务台排队系统中队长函数关于时间的凸性（凹性），其证明方法与本文定理 1 类似，这里只给出结果，略去它的证明过程。

定理 2 记 $\mathbf{E}_\nu[f(X(t))]$ 表示 $\mathrm{M}^X/\mathrm{M}/c$ 排队系统中的队长函数，其中 $f(\cdot)$ 为定义于 Z_+ 上的实值函数，$\nu=(\nu(0),\nu(1),\ldots)$ 为该排队系统中队长过程 $\mathbf{X}$ 的初始概率分布，记该系统中顾客的到达率为 λ，服务率为 μ, $\bar{b}(k)=1-\sum\limits_{i=0}^{k}b(i),k\geq 0$， $b(0)=0$， $\Delta f(k)=f(k+1)-f(k),k\geq 0$。则

(i) 如果 $\nu,b(k),k\geq 0$ 和 $f(\cdot)$ 满足 $(k\wedge c)\nu(k)\leq\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda}{\mu}\bar{b}(k-1-i)\nu(i),k\geq 1$ 和

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{\infty}\lambda b(i)\Delta f(k+i-1)\\&\leq[\lambda+(k\wedge c)\mu]\Delta f(k-1)-[(k-1)\wedge c]\mu\Delta f(k-2),k\geq 1\end{aligned}\tag{8}$$

则 $\mathbf{E}_\nu[f(X(t))]$ 是 t 的凹函数；

(ii) 如果 $\nu,b(k),k\geq 0$ 和 $f(\cdot)$ 满足 $(k\wedge c)\nu(k)\geq\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda}{\mu}\bar{b}(k-1-i)\nu(i),k\geq 1$ 和 (8)，则 $\mathbf{E}_\nu[f(X(t))]$ 是 t 的凸函数。 □

例 1 考虑一个单批量多服务台的 $\mathrm{M}/\mathrm{M}/c(c\geq 1)$ 排队决策过程的最优控制问题。假定系统中有 c 个服务台，服务台对顾客的服务率 μ 为常数，顾客到达时刻为决策时刻，记 $A=\{1,2,\ldots,c\}$ 为决策集合，在决策时刻选择以速率 λ_a 顾客到达，其中 $a\in A$， λ_a 满足 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq\lambda_c$，此时定义一个开关费用 (switching cost) 记为 $s(a,d)$, 它代表从决策 a 到决策 d 转换的费用，其中 d 为下一个决策时刻所选用的决策指标（即以速率 λ_d 顾客到达 $(d\in A)$ ）。在决策时刻选用 λ_a，且系统中有 i 个顾客，此时有一个单位时间使用 λ_a 费用 (usage cost)，记为 $h(i,a)$, 其中 $a\in A,i\in I=\{0,1,2,\ldots\}$。假定 $\Delta h(i,a)=h(i+1,a)-h(i,a)\geq 0,i\geq 0,a\in A$。

Lu 和 Serfozo[5] 证明对例 1 中描述的排队决策过程，如果函数 $s(a,d)$ 和 $h(i,a)$ 满足一定的条件，则该排队决策过程的最优策略是递增的滞后 (hysteretic) 策略，该策略的直

观意义是当队长增加时选取较小的到达速度和较大的服务速度的策略是最优的。由于费用 $h(i,a)$ 随队长增加而增加， Lu 和 Serfozo[5] 的结果表明通过降低顾客到达速度或增加服务台的服务速度而减少队长从而降低费用。从本论文的定理 1 的 (iii) 和 (iv) 可以看出，当降低顾客到达速度或增加服务台的服务速度对成批到达排队系统确实能在随机序意义下使队长降低。

4 模型 II: 成批到达一般服务的单服务台排队系统

考虑成批到达的 $\mathrm{M}^X/\mathrm{G}/1$ 排队系统，假定顾客到达过程为参数 λ 的复合 Poisson 过程，其中顾客到达的批量独立同分布，它是一个离散随机变量，记为 B, 记它的分布函数为 $\{b(k)\}_{k=1}^{\infty}$ 。假定系统中有一个服务台，服务台对顾客的服务时间独立同分布服从一般分布，其分布函数为 $G(\cdot)$ 。假定顾客到达时间间隔、服务时间和到达批量相互独立，服务规则为先到系统先服务 (FCFS). 记 Y_n 表示第 n 个顾客被完成服务离开系统时留在系统中的顾客数，则 $\mathbf{Y}=\{Y_n,\ n\geq 0\}$ 是离散时间 Markov 链，它的状态空间为 $\mathbf{Z}_+$ ，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots \\ u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \cdots \\ & a_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdots \\ & & u_0 & u_1 & u_2 & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} &u_0=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dG(t),\\ &u_k=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{k}\tfrac{(\lambda t)^n}{n!}b^{(n)}(k)dG(t), k\geq n\geq 1. \end{aligned} \tag{10}$$

这里 $b^{(n)}(\cdot)$ 表示批量分布 $b(\cdot)$ 的 n 重卷积. 假设 $\lambda>0$ ，则 $\mathbf{Y}$ 是不可约马尔可夫链，并且它是时齐的。经检验可得 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}u_i=1$, 即 P 为随机矩阵。

成批到达一般服务单服务台排队系统中队长过程、稳态队长的随机比较以及队长函数关于时间的凹性（凸性）有如下定理 3 的结果，其中 $(i)\sim(v)$ 的证明方法与定理 1 和定理 2 类似， (vi) 的证明可以利用本文第 2 节中矩母函数序的定义和性质进行简单地证明，这里我们只给出对应的结果，而略去该定理的证明过程。

定理 3 考虑两个成批到达的排队系统 $\mathbf{\Sigma_1}$: $\mathrm{M}^X/\mathrm{G}/1$ 和 $\mathbf{\Sigma_2}$: $\hat{M}^{\hat{X}}/\hat{G}/1$ ，假定系统 $\mathbf{\Sigma_1}$ 和 $\mathbf{\Sigma_2}$ 中顾客到达率分别为 λ 和 $\hat{\lambda}$; 服务时间分别为 S 和 $\hat{S}$, 它们的分布分别记为 $G(\cdot)$ 和 $\hat{G}(\cdot)$; 顾客到达批量分别为 B 和 $\hat{B}$ ，它们的分布分别记为 $b=(b(1),b(2),\ldots)$ 和 $\hat{b}=(\hat{b}(1),\hat{b}(2),\ldots)$ 。记 Y_n 和 $\hat{Y}_n$ 分别表示系统 $\mathbf{\Sigma_1}$ 和 $\mathbf{\Sigma_2}$ 中第 n 个顾客被完成服务离开系统时留在系统中的顾客数，假定马尔可夫链 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 的一步转移概率矩阵由 (9) 给出，而马尔可夫链 $\{\hat{Y}_n,n\geq 0\}$ 的一步转移概率矩阵是将 (9) 中的 λ 、 $G(\cdot)$ 和 $b(i),i\geq 1$ 分别换成 $\hat{\lambda}$ 、 $\hat{G}(\cdot)$ 和 $\hat{b}(i),i\geq 1$ 而得到。记马尔可夫链 $\{Y_n,n\geq 0\}$ 和 $\{\hat{Y}_n,n\geq 0\}$ 的初始概率分布分别为 ν 和 $\hat{\nu}$ ， $\mathbf{E}_\nu[f(Y_n)]$ 表示 $\mathrm{M}^X/\mathrm{G}/1$ 排队系统中的队长函数，其中 $f(\cdot)$ 为定义于 $\mathbf{Z}_+$ 上的实值函数。

(i) 如果 $\nu\leq_d\hat{\nu},\lambda=\hat{\lambda},B=_d\hat{B}$ 且 $b\leq_d\hat{b}$, 则

$$\{Y_n,\ n\geq 0\}\leq_d\{\hat{Y}_n,\ n\geq 0\}; \tag{11}$$

(ii) 如果 $\nu\leq_d\hat{\nu},\lambda\leq\hat{\lambda},B=_d\hat{B}$ 且 $b=_d\hat{b}$, 则 (11) 成立;

(iii) 如果 $\nu\leq_d\hat{\nu},\lambda=\hat{\lambda},b=_d\hat{b}$ 且 $B\geq_d\hat{B}$ 则 (11) 成立;

(iv) 如果 $\nu =_d \hat{\nu}, \lambda = \hat{\lambda}, b =_d \hat{b}, B =_d \hat{B}$, 且 $\nu, u_i, i \geq 0$ 和 $f(\cdot)$ 满足

$$\sum_{j=1}^{k+1} \nu(j)(\sum_{i=0}^{k+1-j} u_i) + \nu(0) \sum_{j=0}^{k} u_i \leq \sum_{j=0}^{k} \nu(j), k \geq 0, \tag{12}$$

和

$$f(0) \leq f(1), \sum_{j=0}^{\infty} u_j \Delta f(k+j-1) \leq \Delta f(k), k \geq 1 \tag{13}$$

则 $\mathbf{E}_\nu[f(Y_n)]$ 是 n 的凹函数;

(v) 如果 $\nu =_d \hat{\nu}, \lambda = \hat{\lambda}, b =_d \hat{b}, B =_d \hat{B}$, 且 $\nu, u_i, i \geq 0$ 和 $f(\cdot)$ 满足

$$\sum_{j=1}^{k+1} \nu(j)(\sum_{i=0}^{k+1-j} u_i) + \nu(0) \sum_{j=0}^{k} u_i \geq \sum_{j=0}^{k} \nu(j), k \geq 0, \tag{14}$$

和 (13), 则 $\mathbf{E}_\nu[f(Y_n)]$ 是 n 的凸函数。

(vi) 记 L 和 $\hat{L}$ 分别表示系统 $\mathbf{\Sigma_1}$ 和 $\mathbf{\Sigma_2}$ 中的稳态队长, $\hat{\rho} = \lambda \mathbf{E}[\hat{B}]\mathbf{E}[S]$ 。如果 $B \leq_{mg} \hat{B}$ 且 $\hat{\rho} < 1$, 则 $L \geq_{mg} \hat{L}$ 。

5 小结

本文利用随机比较方法研究了成批到达多服务台排队和成批到达一般服务的单服务台排队系统中队长过程的随机比较问题。成批到达一般服务的多服务台排队系统中队长过程随机比较和队长函数的凸性 (凹性) 等问题值得进一步研究。

参 考 文 献

[1]Medhi,J. *Stochastic Models in Queueing Theory*, Academic Press, New York. 1991

[2]Stoyan,D. *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, Wiley, New York. 1983

[3]Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. *Stochastic Orders and Their Applications*, Academic Press,Inc., New York. 1994

[4]Yu,H.B, He,Q.M. and Zhang,H.Q. Convexity of some functions associated with denumerable-state-space Markov chains and applications to queueing systems, Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2006, **20**:67-86.

[5]Lu,F.V. and Serfozo,R.F. M/M/1 ququeing decision processes with monotone hysteretic optimal policies. *Operations Research*, 1984, **32**:1116–1132.

Stochastic Comparison on Queueing System with Batch Arrival

YU Hai-Bo

(*The college of Economics and Management, Beijing University of Technology, Beijing* 100022)

(*E-mail: haibo@bjut.edu.cn*)

HE Qi-Ming

(*Dalhousie University Halifax, Nova Scotia, Canada B3J2X4*)

ZHANG Hanqin

(*Academy of Mathematics and System Sciences, Chinese Academy of Sciences* 100080)

Abstract In this paper, we study stochastic comparison problem on the queue length processes of the queueing system with batch arrival. We analyse the queueing system with batch arrival, multi-server and exponential service, the stochastic comparison of queue length process and convexity of queue length function in time are obtained by using the stochastic comparison method. At the same time, we get the stochastic comparison of queue length process and steady-state queue length for the queueing systen with a general service and single server, we also provide the convexity and concavity of queue length function in time.

Key words Queueing system, batch arrival, Markov Chain, stochastic comparison, convexity

MR(2000) Subject Classification: 60K25, 90B22
Chinese Library Classification: O226